Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\pi = 3,1416$.

E ORA
PER QUALCOSA DI
COMPLETAMENTE
DIVERSO...

6 marzo 2015

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. ***L'inquisizione spagnola***

Aula di scuola elementare.

Maestra Mi hai stufato, Macchele. Adesso, per punizione, scrivi 75 volte il tuo nome e cognome in maiuscolo sul foglio.

Anna (*bisbigliando*) Questa è roba da inquisizione spagnola. (*Scrive in fretta, stacca la penna dal foglio il minor numero di volte possibile, non riscrive mai uno stesso tratto rettilineo. Produce orgogliosa il foglio con scritto* ANNA MACCHELE*—tutte lettere maiuscole, staccate una dall'altra—tante volte quante richieste dalla maestra.*)

Maestra (*arrabbiata*) Visto che hai fatto così in fretta, conta quante volte hai staccato la penna dal foglio da quando hai iniziato a scrivere a quando hai finito.

Voce fuori campo Che cosa risponde Anna?

2. ***Ufficio Cambi***

Ufficio Cambi prima dell'apertura al pubblico. John sta preparando i cambi tra tutte le seguenti valute: ARS, AUD, BRL, CAD, CHF, CNY, CZK, DKK, EGP, EUR, GBP, HKD, HUF, IDR, ILS, INR, JPY, MXN, NOK, NZD, PHP, PLN, RUB, SAR, SEK, SGD, TRY, USD, ZAR. Ha preparato una tabella quadrata per inserire tutti i cambi; in cima a ogni colonna e a fianco di ogni riga c'è la denominazione di una valuta. Ha già scritto 1 *in tutte le caselle sulla diagonale principale per il cambio di una valuta con se stessa.*

Eric (*guardando le caselle della tabella*) Sei a buon punto. Adesso ti mancano solo altri cinque cambi.

John (*guardando Eric stupito*) Stupidaggini! Il numero minimo necessario per poter completare la tabella è ben più grande.

Voce fuori campo Qual è il numero minimo a cui si riferisce John?

3. ***L'origine delle specie (versione logica)***

Su un'isola due biologi con il camice si dirigono verso una fila di 2015 *pappagalli.*

Darwin Su quest'isola ci sono solo due specie di pappagalli: i pappagalli normali e i pappagalli intelligenti. Un pappagallo normale ripete sempre, esattamente l'ultima frase detta; un pappagallo intelligente dice sempre la verità.

Boole Questi pappagalli in fila sono normali o intelligenti?

Darwin Non lo so. Proviamo a chiederglielo. (*Rivolto ai pappagalli*) Lui (*Indicando Boole*) vuole fare la stessa domanda a ciascuno di voi.

Boole (*rivolto ai pappagalli*) Quanti dei pappagalli al tuo fianco sono normali?

Primo pappagallo della fila Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

Secondo pappagallo della fila Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

⋮

Duemilaquindicesimo pappagallo della fila Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

Darwin Ogni pappagallo ha detto che esattamente uno dei pappagalli al suo fianco è normale: sono metà intelligenti e metà normali.

Boole Non è possibile! In totale sono un numero dispari! Ti sbagli, non sappiamo esattamente quanti sono quelli intelligenti. Però ho calcolato il massimo numero possibile di pappagalli intelligenti ed anche il minimo numero possibile.

Voce fuori campo Quanto vale la differenza tra il più grande e il più piccolo dei due numeri che Boole ha calcolato?

4. *Dr. House (versione numerica)*

Studio di parapsicologia, due persone in camice, una è bendata, l'altra fa sedere un terzo uomo davanti a un tavolo in mezzo alla stanza.

Dr. Gregory (*all'uomo seduto*) Adesso lei scriverà un numero di tre cifre diverse, usando soltanto le cifre 0, 1, 2 e 3. Ma deve essere scritto in modo che le cifre appaiano in ordine decrescente!

Dr. James (*bendato, parla all'uomo seduto*) Stia calmo, non vogliamo farle del male.

Dr. Gregory (*batte violentemente un bastone sul tavolo*) NO! 123 NON VA BENE! Le cifre devono essere in ordine decrescente!

L'uomo seduto cancella 123 *e scrive un altro numero.*

Dr. Gregory Bene! Ora lo riscriva a fianco.

Dr. James (*all'uomo seduto*) Lei ha adesso davanti un numero di sei cifre. Lo divida per l'anno in corso, 2015. Che resto viene?

Uomo seduto Viene resto 0.

Dr. James (*sudando*) So qual è il quoto.

Dr. Gregory (*abbraccia James*) Fantastico!

Voce fuori campo QUAL È IL QUOTO?

5. *Il ministero dei calcoli stupidi*

Stanza di un ministero; un impiegato sta scrivendo gruppi di quattro cifre su un foglio. Entra un collega.

Impiegato Ho finito il lavoro per oggi.

Collega Che cosa dovevi fare?

Impiegato Scrivere tutte le permutazioni di 2015—anche quelle con 0 come cifra più a sinistra—perché il ministro vuole sapere la somma di tutti questi numeri.

Collega Che somma ti è venuta?

Impiegato Quella la calcolo durante il mese che viene.

Voce fuori campo CHE SOMMA CALCOLERÀ?

[Scrivere le prime quattro cifre da sinistra del risultato.]

6. *Robinson Crusoe (versione geometrica)*

Su una spiaggia deserta, un uomo disegna nella sabbia un esagono regolare. A partire da questo disegna sei triangoli equilateri, ciascuno con un lato coincidente con un lato dell'esagono ed esterno all'esagono; ottiene così una stella a 6 punte. Sempre disegnando con il piede, traccia segmenti a congiungere coppie di vertici consecutivi della stella, esterni all'esagono, ottenendo un nuovo esagono, più grande del precedente. Infine, collega tutti i vertici dell'esagono iniziale (quello più piccolo) con il centro di quell'esagono.

Voce fuori campo QUAL È IL PRODOTTO TRA IL NUMERO DI TRIANGOLI EQUILATERI PRESENTI NELLA FIGURA DISEGNATA SULLA SABBIA E IL NUMERO DI TRIANGOLI NON EQUILATERI NELLA STESSA?

7. *Sketch scientifico*

Laboratorio segreto, due scienziati con il camice guardano la lavagna. Sulla lavagna c'è scritto: $a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ per n in $\mathbb{N}$.

Primo scienziato È la definizione di una successione per ricorsione.

Secondo scienziato Scommetto che a_{2015} è positivo.

Primo scienziato Ci sto! Scommetto tanti euro quanto il valore assoluto della sua parte intera.

Voce fuori campo CHI VINCE LA SCOMMESSA E QUANTO VINCE?

[Scrivere 1 come prima cifra se il primo scienziato vince la scommessa, scrivere 2 altrimenti. Usare le tre restanti cifre per indicare la somma in euro vinta.]

8. *2001: odissea nello spazio (versione aritmetica)*

Si vede un cubo trasparente che fluttua nello spazio cosmico, in sottofondo Also Sprach Zarathustra *di R. Strauss: un'asta, totalmente all'interno del cubo, collega due vertici diametralmente opposti. Una mano compare dallo spazio profondo, impugna una sega rotante; non fa rumore perché è nello spazio profondo. Vibra un colpo lineare violentissimo che passa per un vertice del cubo e, muovendosi perpendicolarmente all'asta, la taglia in due.*

Voce fuori campo QUANTO VALE 1000 VOLTE IL RAPPORTO TRA LA PARTE PIÙ LUNGA E LA PARTE PIÙ CORTA DELL'ASTA TAGLIATA?

9. ***Rompendo le notizie***

Telegiornale. Sotto scorre la scritta $\boxed{\text{BREAKING NEWS}}$.

Annunciatore Un matematico ha trovato un modo per usare tutte le cifre dall'1 al 9, una e una sola volta, nell'espressione

$$\sqrt{ABC} = D + E + F + G + H + I$$

in modo tale che questa risulti corretta.

Sotto scorre la scritta $\boxed{ABC \text{ vuol dire } 100 \times A + 10 \times B + C}$.

Annunciatore Lo intervistiamo per farci dire quale numero ha scritto sotto la radice.

Voce fuori campo Che numero ha scritto sotto la radice?

10. ***Cast Away (versione probabilistica)***

Si vede un poligono regolare con 2016 *lati che galleggia sul mare calmo.*

Voce fuori campo Scelti a caso tre vertici distinti di esso, qual è la probabilità che formino un triangolo rettangolo?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

11. ***Frankenstein Junior (versione numerica)***

Un castello su un picco, il vento sibila, i lupi ululano. In una stanza enorme una nobildonna sta parlando all'Impacchettatore Ufficiale (I.U.).

Duchessa Alla festa in maschera farò un dono a ogni invitato. I.U., devi impacchettare i doni per tutti gli invitati. Ne voglio un terzo piccoli, un terzo medi e un terzo grandi. Il mio maggiordomo ti mostrerà i fogli di carta regalo e ti spiegherà come fare. Lo ha sempre fatto lui.

Maggiordomo (*nascosto dietro a una colonna, parla da solo*) Ho sempre impacchettato io i doni per gli invitati. Gliela faccio pagare all'I.U.. (*Si fa avanti e si rivolge all'I.U.*) Ecco i fogli: ce ne sono 50 di misura piccola, 199 di misura media e 250 di misura grande. Ogni pacchetto può essere fasciato con una carta della stessa misura (ad esempio, un pacchetto piccolo con carta piccola) o di misura più grande (ad esempio, un pacchetto piccolo con carta grande), mai di misura più piccola (ad esempio, un pacchetto grande con carta media).

Duchessa (*all'I.U.*) Ti pagherò 2€ per ogni regalo fasciato con carta della stessa grandezza, 1€ per ogni pacco fasciato con carta non della sua grandezza, non ti darò nulla per ogni regalo non fasciato. Dimenticavo: i miei ospiti saranno 300.

La Duchessa esce dal salone. Con i segni della vendetta sul volto, il maggiordomo ruba un foglio di carta dalla scorta dei fogli dell'I.U. ogni volta che l'I.U. impacchetta un regalo. L'I.U. vede quel che fa il maggiordomo e adotta la stategia migliore per guadagnare più soldi così come il maggiordomo adotta quella migliore per fargliene guadagnare meno.

Voce fuori campo Quanti euro riceve l'I.U. per il suo lavoro?

12. ***Sketch matematico***

Due matematici davanti a una lavagna. Sulla lavagna c'è scritto:

$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 \qquad f(2n) = f(n) \qquad f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$ per n in $\mathbb{N}$, $n > 0$.

Terry È la definizione per ricorsione della funzione fusc di Dijkstra.

Graham Permette di elencare i numeri razionali positivi senza ripetizioni, prendendo

$$r_m = \frac{f(m)}{f(m+1)}$$

per m intero positivo.

Voce fuori campo Per quale m si ha $r_m = \dfrac{7}{8}$?

13. ***Le inchieste del commissario Maigret (versione logica)***

Centrale di polizia francese molto affollata: ci sono 2015 *sospettati di una rapina in banca: tra di loro c'è il colpevole e tutti i sospettati sanno chi esso sia.*

Maigret Abbiamo dato a tutti il siero?

Poliziotto Sì, capo. E durerà per mesi. Ma lo sa che funziona male, a rimbalzo?

Maigret Che cosa vuoi dire?

Poliziotto Se chi l'ha ricevuto mente un giorno, allora dice la verità il giorno dopo.

Maigret Ascolta, facciamo così: oggi facciamo la domanda «Chi è il colpevole?» a qualche sospettato, uno alla volta. L'interrogato deve rispondere, altrimenti si fa cinque anni di carcere per favoreggiamento. Mettiamo tutti in gattabuia di notte. Domani facciamo ancora la stessa domanda a chi vogliamo tra i sospettati. E continuiamo così fino a che non scopriremo il colpevole.

Poliziotto A proposito, c'è uno dei sospettati che dice sempre la verità.

Maigret Questo è importante. Sai dirmi chi è?

Poliziotto No.

Maigret Fa lo stesso. Cominciamo perché ci vorranno giorni per finire questa indagine.

Voce fuori campo DOPO QUANTE DOMANDE, COME MINIMO, MAIGRET HA LA CERTEZZA DI SAPERE CHI È IL COLPEVOLE?

14. ***Harry ti presento Sally (versione combinatoria)***

Un bar pieno di gente, al tavolo due amici parlano animatamente.

Sally Sei un bastardo! Mi devi un sacco di soldi e non ti ricordi quanto?

Harry Hai ragione! Facciamo così: giochiamoci il debito.

Harry scrive a matita tutti i numeri interi da 0 *a* 16384.

Harry Ci alterniamo a cancellarne (la parte intera del)la metà di quelli che compaiono ancora scritti; ti pagherò in euro la differenza tra il più grande e il più piccolo dei due numeri rimasti. (*Con aria di sfida*) Comincia tu.

Con una gomma Sally ne cancella 2^{13}*, poi Harry cancella* 2^{12} *dei rimanenti, e così via finché Harry ne cancella* 1*. Sally attua la migliore strategia per ottenere più denaro possibile, Harry fa lo stesso per pagare il meno possibile.*

Voce fuori campo QUANTI EURO DOVRÀ PAGARE HARRY A SALLY?

15. ***La spia che mi amava (versione geometrica)***

Si vede un cubo trasparente che fluttua nello spazio cosmico, in sottofondo il secondo movimento del Concerto n. 21 per pianoforte e orchestra *di W.A. Mozart. Una mano compare dallo spazio profondo, impugna una biro e segna tutti i centri delle facce. Traccia poi i segmenti di congiunzione tra centri di facce adiacenti generando un solido all'interno del cubo.*

Voce fuori campo QUANTO VALE IL RAPPORTO TRA IL VOLUME DEL CUBO E IL VOLUME DEL SOLIDO ALL'INTERNO?

16. ***Il buono, il brutto, il cattivo (versione probabilistica)***

Un saloon nel Far West, due cowboy seduti a un tavolo; intorno un capannello di curiosi che aspetta di vedere il morto.

Tuco Guarda questa moneta, Biondo. Ha tre facce: testa, croce, fiamma.

Il Biondo È equilibrata?

Tuco Certo! Ti propongo un gioco: se esce testa, chi ha tirato la moneta vince; se esce croce passa la moneta all'altro; se esce fiamma tira ancora. Si continua finché uno dei due giocatori non vince. Comincio io.

Il Biondo (*estraendo la pistola*) No, comincio io.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI VITTORIA DEL BIONDO?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

17. ***Being There (versione combinatoria)***

Una serra con 2601 *vasi disposti su* 51 *file a formare un quadrato* 51×51, *ciascuno dei lati è rivolto verso uno dei quattro punti cardinali. Un giardiniere pianta un seme nel vaso centrale.*

Giardiniere (*parlando ai vasi*) Da domani, casualmente, pianterò un seme in ogni vaso vuoto che confini a Nord o a Sud con un vaso già seminato oppure ne pianterò uno in ogni vaso vuoto che abbia un vaso seminato tra gli otto vasi che lo circondano. Nel primo caso riuscirò a completare il lavoro in un giorno, nel secondo, invece, mi serviranno due giorni. Lavorerò ogni giorno, ma tra 21 giorni vi lascerò, senza lavorare in quel giorno; me ne vado da qui. Vorrò aver finito comunque; perciò nel ventesimo giorno non inizierò un lavoro che mi richiede due giorni per completarlo.

Voce fuori campo QUANTE CONFIGURAZIONI DIVERSE DI VASI SEMINATI PUÒ OTTENERE IL GIARDINIERE NELLA SERRA QUANDO STARÀ PER ANDARSENE AL TERMINE DEL PERIODO DI 21 GIORNI?

[Due configurazioni sono da considerarsi diverse se uno stesso vaso è vuoto in una, seminato nell'altra.]

18. ***Specchi***

Due matematici davanti a una lavagna.

Michael Ti ho già detto che un numero intero è *a specchio* se ha almeno due cifre e ha almeno un divisore comune maggiore di 1 con il numero letto al contrario.

John Sono tanti: ad esempio, 11, 21, 30, 55.

Michael Certo, certo! Ma non ci sono cinque numeri a specchio consecutivi.

John Non è vero; ho appena trovato la sequenza dei cinque consecutivi più piccoli possibile.

Voce fuori campo QUAL È IL NUMERO MAGGIORE DELLA SEQUENZA TROVATA DA JOHN?

19. ***Bingo***

Sala per il Bingo piena di giocatori.

Presentatore Oggi proponiamo un nuovo gioco con 81 palline numerate da 0 a 80: pagando un euro, potrete scegliere tre numeri la cui somma faccia 80 non necessariamente diversi tra loro, in ordine crescente.

Spettatore Ma come faccio a mettere in ordine crescente 20, 20 e 40?

Presentatore (*in tono ironico*) Per il nostro giocatore m.a.t.e.m.a.t.i.c.o, spieghiamo che, se paga un euro, scrive tre numeri n, m, k tali che $n + m + k = 80$ e $0 \leq n \leq m \leq k \leq 80$ e partecipa al gioco; (*rivolto allo spettatore*) va bene così? (*rivolto a tutti*) Estraggo a caso una pallina dal sacchetto con le 81 palline numerate da 0 a 80. Chi ha scritto il numero estratto vince 10 euro.

Spettatore Li ho scritti e ho pagato l'euro, ma questo gioco è una truffa!

Il presentatore prende una pistola e spara nella direzione dello spettatore.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LO SPETTATORE, SCELTI TRE NUMERI A CASO COME RICHIESTI DALLE REGOLE, VINCA?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

20. ***Galaxy Song (versione geometrica)***

Si vede un cubo che fluttua nello spazio cosmico, in sottofondo Galaxy Song *di Eric Idle. Lentamente sparisce una parte del cubo, compresa tra due piani paralleli distinti, ciascuno passante per tre vertici che non stanno sulla stessa faccia, fino a quando resta soltanto una sfera tangente ai due piani.*

Voce fuori campo SAPENDO CHE LA DIAGONALE PRINCIPALE DEL CUBO È DI 7056 mm, QUAL È LA LUNGHEZZA IN mm DEL RAGGIO DELLA SFERA?

21. ***È...***

Voce fuori campo PER QUANTE COPPIE ORDINATE (n, p), CON n INTERO POSITIVO MINORE O UGUALE A 200 E p NUMERO PRIMO, LA SOMMA $p^2 + np$ È QUADRATO DI UN NUMERO INTERO?

Compare un piede che pesta fuori campo.

[Si ricorda che 1 non è un numero primo.]

22. ***Poste e pensioni***

Interno di un ufficio postale. Sei pensionati in coda davanti all'unico sportello aperto.

Terry Io vado a giocarmi la pensione alle slot machine qui a fianco.

Gli altri pensionati Anch'io! Anch'io!

Impiegato (*dietro alla sportello*) Devo chiudere per qualche minuto. Prendete il numero crescente di posizione in coda. (*Dà un foglietto con il numero* 1 *al primo in coda, un foglietto con il numero* 2 *al secondo in coda, e così via. Esce.*)

Terry Sempre così: non hanno i soldi per pagare e vanno a cercarli in giro. (*Brontolando, va a sedersi con gli altri pensionati.*)

L'impiegato rientra. I pensionati, vedendolo, si precipitano arrancando e spingendosi davanti allo sportello senza usare il foglietto che l'impiegato aveva dato loro.

Impiegato Calma! Calma! (*Non ha effetto.*) Vi propongo un gioco migliore delle slot machine. Se riesce, pagherò tre volte la pensione a tutti. Se non riesce, non pagherò nulla.

Tutti i pensionati (*urlando*) SÌ! SÌ! SÌ! SÌ!

Impiegato Il gioco è questo: l'ultimo della coda guarda il numero che ha in tasca. Se è 6, la prima fase del gioco finisce; se non è 6, il pensionato va ad occupare la posizione indicata dal suo numero, spostando colui che occupava quella posizione. La persona costretta a spostarsi, guarda a sua volta il numero che ha in tasca. Se è 6, va alla fine della coda e la prima fase del gioco finisce; altrimenti va ad occupare la posizione indicata dal suo numero, spostando quindi un altro pensionato che deve controllare il numero che ha in tasca, e così via. Il gioco riesce—e vi pago tre volte le pensioni—esattamente se, dopo la prima fase, tutte le persone hanno occupato la posizione corretta, cioè quella che hanno sul foglietto.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE I PENSIONATI VENGANO PAGATI?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

23. ***Ruoli***

Aula in una scuola.

Professore In un triangolo ABC, sia M il punto medio di BC e sia N il punto su BC tale che $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$. Si sa che $5AB = 8AC$.

Alunno (*al professore*) Bene! Quanto vale il rapporto tra NB e NC?

[Rispondere con 1000 volte il rapporto richiesto.]

24. ***Filosofia a dadi***

Un bar in periferia. Un capannello di persone, ciascuna con almeno un libro in mano, sta intorno a un tavolo dove due avventori stanno per giocare a dadi.

Nietzsche Platone aveva determinato la perfezione nei cinque solidi regolari. Eccoli riprodotti in questi cinque dadi, ciascuno con le facce numerate a partire da 1 fino al numero delle facce.

Kant È una constatazione banale!

Schelling Basta chiacchere! Giocate!

Marx Fate correre quei dadi.

Hegel Basta con la sintesi; un po' di tesi e di antitesi! Datevi da fare con quei dadi!

Kant Temo che stiano male interpretando i miei imperativi. Seguiamo Aristotele: escludiamo ottaedro, dodecaedro e icosaedro. (*Ulteriori, vibrate proteste dagli astanti.*) D'accordo: ho avuto un ripensamento. Escludiamo solo l'icosaedro.

Nietzsche Allora si gioca così: riponiamo gli altri quattro dadi in un sacchetto. Tu ne peschi due, in modo del tutto casuale; io prendo i due rimasti. Poi, contemporaneamente, lanciamo i dadi che abbiamo pescato. Vinci tu se la somma dei numeri che ottieni tirando i tuoi dadi è maggiore della somma dei numeri che ottengo tirando i miei dadi.

Kant (*mostrando superiorità intellettuale*) Ci sto.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI VITTORIA DI KANT?

[Rispondere con 10000 volte il risultato.]

Soluzioni per la Coppa Gauss 2015

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Mihaela Badescu, Luigi Amedeo Bianchi, Gabriele Della Torre, Mattia Fecit, Giulia Frosoni, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Maurizio Paolini, Damiano Poletti, Edi Rosset.

Soluzione del problema 1. Contiamo i tratti continui (cioè quelli per i quali non è obbligatorio staccare la penna dal foglio) minimi, necessari alla scrittura delle singole lettere.

Lettera	A	N	C	E	M	H	L
Tratti minimi	2	1	1	2	1	3	1

Perciò per scrivere il suo nome una volta saranno necessari

$$2+1+1+2+1+2+1+1+3+2+1+2=19$$

tratti continui. Dunque per scrivere il suo nome 75 volte saranno necessari

$$19 \cdot 75 = 1425$$

tratti continui. Quindi Anna dovrà staccare la penna dal foglio $1425-1=1424$ volte.
La risposta è `1424`.

Soluzione del problema 2. Ne servono $29-1$. Inoltre non conta molto quali si conoscono, basta che i dati siano tali da non avere alcuna riga o colonna vuota all'inizio (esclusa la diagonale).
La risposta è `0028`.

Soluzione del problema 3. Si noti che il primo pappagallo deve essere intelligente, altrimenti ripeterebbe la domanda posta da Boole. Per cui il secondo deve essere necessariamente normale. Una configurazione possibile sarà perciò, indicando con "I" un pappagallo intelligente e con "N" un pappagallo normale:

$$IN\ IIN \dots IIN$$

dato che $3|(2015-2)$. Il numero massimo di pappagalli intelligenti è $1+\frac{2013}{3}\cdot 2 = 1343$. Supponiamo per assurdo che non sia così; esiste pertanto una configurazione con almeno 1344 pappagalli intelligenti. Poiché il primo e il secondo pappagallo sono fissati, ci sono al massimo 671 pappagalli normali. Per il principio del "pigeonhole" esisterà una tripletta di pappagalli intelligenti vicini. $\lightning$
Il minimo numero sarà chiaramente 1, dato dalla sequenza:

$$INN \dots N$$

. Quindi la risposta sarà $1343-1=1342$
La risposta è `1342`.

Soluzione del problema 4. Innanzitutto, si noti che essere divisibile per 2015 implica che il numero è divisibile per 5, 13 e 31. Visto che è divisibile per 5, la sua ultima cifra deve essere 0 oppure 5, ma dal testo si evince che 5 non può essere. Quindi l'ultima cifra, così come la quarta, è 0. Abbiamo, adesso, solo 6 numeri possibili: 120120, 210210, 230230, 320320, 130130 e 310310. Tre di questi (120120, 230230 e 130130) sono da scartare per la seconda ipotesi data dal testo. Quindi rimangono solo 210210, 320320 e 310310. Si noti che 210210 è divisibile per 2, 3, 5, 7 e 11. Scomponendo il numero si trova che è anche divisibile per 91 (e quindi per 13), ma non per 31. Quindi è da scartare. Il numero 320320 si può riscrivere come $32 \cdot 10010$ e anche lui non è divisibile per 31. Rimane solo 310310 che, effettivamente, è divisibile per entrambi e rispetta la consegna. Il numero cercato è 310310. Per terminare il problema bisogna calcolare il quoziente della divisione tra 310310 e 2015, che vale 154. La risposta è `0154`.

Soluzione del problema 5. Tutte le permutazioni possibili del numero 2015 sono 4!. Fissata una cifra, le altre tre permutano in 3! modi; ad esempio), fissata la cifra delle unità, questa è presente 3! volte nella somma finale. La somma di una generica colonna di cifre (immaginando di fare la somma in colonna) è la somma delle cifre che la compongono. In particolare, basta sommare le cifre che sono presenti e moltiplicarle per le volte che esse si ripetono. La somma di una generica colonna è $S = (0 + 1 + 2 + 5) \cdot (3!) = 48$. Quindi la somma di tutte le colonne è S moltiplicata per la potenza di 10 appropriata. La somma di tutti i numeri è $48 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) = 48 \cdot 1111 = 53328$.
La risposta è `5332`.

Soluzione del problema 6. I triangoli non equilateri sono tutti e soli quelli che hanno un lato appartenente all'esagono più grande. Da ognuno dei lati dell'esagono si formano 5 triangoli non equilateri, quindi i triangoli non equilateri sono $5 \times 6 - 6 = 24$(perché dobbiamo togliere una volta i 6 triangoli contati due volte, quelli con due lati appartenenti all'esagono più grande). Tutti gli altri triangoli sono equilateri, in particolare, se l è il lato dell'esagono più piccolo, ce ne sono 12 di lato l, 6 di lato $2l$, e 2 di lato $3l$. In totale sono quindi 20. Il prodotto è $24 \times 20 = 480$.
La risposta è `0480`.

Soluzione del problema 7. Si osserva che $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = \frac{1}{2}$. La funzione è periodica, di periodo 4. Quindi $a_{2015} = 3$.
La risposta è `2003`.

Soluzione del problema 8. Siano $ABCD$ e $A'B'C'D'$ le basi del cubo (vertici omonimi stanno sullo stesso spigolo). Il triangolo $AA'C'$ è un triangolo rettangolo in A'. La perpendicolare passante per A' ad AC', quindi è l'altezza relativa all'ipotenusa AC'. Quindi possiamo applicare il primo teorema di Euclide, che fornisce la relazione $x \cdot (x + z) = \ell^2$, dove ℓ è la misura del lato del cubo. Sappiamo ora che la diagonale del cubo misura $\sqrt{3} \cdot \ell$, quindi $x + z = \sqrt{3} \cdot \ell$. Da qui si ha che $x \cdot \sqrt{3} \cdot \ell = \ell^2$ da cui si ricava $x = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$. Quindi $z = \sqrt{3} \cdot \ell - x = \ell \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Il rapporto cercato è quindi $\dfrac{z}{x} = 2$. La risposta è `2000`.

Soluzione del problema 9. Si noti inizialmente che il numero più grande che si può formare è $\sqrt{987} \approx 31.4$, quindi la somma da cercare è minore di 31. D'altro canto, la somma non può essere minore di $\sqrt{123} \approx 11.1$. Quindi il numero cercato appartiene all'intervallo $[12, 31]$. Notiamo che all'interno di questo intervallo ci sono numeri (come 12) il cui quadrato contiene due cifre uguali, dunque inaccettabili per l'obiettivo prefissato. Quindi bisogna escluderli. Questi numeri sono $12, 15, 20, 21, 22, 26, 30$. Rimangono quindi 13 numeri tra cui cercare: $13, 14, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31$. Dato che la minima somma possibile è quella con i numeri da 1 a 6, cioè $\binom{7}{2} = 21$, i numeri $13, 14, 16, 17, 18, 19$ sono da escludere. Rimangono $23, 24, 25, 27, 29, 31$. Si vede ora che

$23 = \sqrt{529} \qquad 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 29$ ⚡
$24 = \sqrt{576} \qquad 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9 = 27$ ⚡
$25 = \sqrt{625} \qquad 1 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 = 32$ ⚡

$27 = \sqrt{729} \qquad 1+3+4+5+6+8 = 27$ ✓
$29 = \sqrt{841} \qquad 2+3+5+6+7+9 = 32$ ↯
$31 = \sqrt{961} \qquad 2+3+4+5+7+8 = 29$ ↯
Quindi la somma cercata è 27 ed il risultato è $27^2 = 729$.
La risposta è `0729`.

Soluzione del problema 10. Sia $n = 2016$ il numero di lati del poligono regolare. Osserviamo che un poligono regolare è sempre inscritto in una circonferenza, quindi un triangolo formato da tre dei suoi vertici è rettangolo se e solo se uno dei tre lati è un diametro.
I casi totali per ottenere un triangolo sono $\binom{n}{3}$. Per calcolare i casi favorevoli due vertici possono essere scelti diametralmente opposti in $\frac{n}{2}$ modi; per ognuno di essi abbiamo $n-2$ scelte possibili per il terzo vertice. Quindi in totale $\dfrac{n(n-2)}{2}$ casi favorevoli. La probabilità è perciò

$$\frac{\frac{n(n-2)}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n-1} = \frac{3}{2015}.$$

La risposta è `2018`.

Soluzione del problema 11. Poiché l'I.U. dispone di 499 fogli e il maggiordomo gliene ruba uno ogni volta che il primo sta fasciando un regalo, l'I.U. riesce al massimo a fasciare 250 pacchetti. Supponiamo che inizi a fasciare un pacchetto medio con un foglio medio. Successivamente fascia, se è possibile, un pacchetto della stessa grandezza del foglio che il maggiordomo ha appena rubato con un foglio di ugual misura. Se ciò non è possibile fascia con un foglio della stessa misura a quello appena rubato un pacchetto piccolo. In questo modo è facile verificare che l'I.U. fascia 250 regali, tutti con carta di ugual misura eccetto per 25 pacchetti piccoli fasciati con fogli grandi.
Supponiamo che ci sia una strategia che gli permetta di guadagnare più soldi. Siccome come già detto non è possibile che fasci più di 250 pacchetti, dovrà fasciare meno di 25 regali con carta di misura diversa. Ma questo non è possibile: infatti se il maggiordomo utilizzasse come strategia di rubare prima tutti i fogli piccoli, poi tutti i medi e poi tutti i grandi l'I.U. riuscirebbe a fasciare, con la carta di ugual misura, solo 25 pacchetti piccoli. Ne avanzerebbero perciò 75 e, nel migliore dei casi, 50 saranno non fasciati e 25 fasciati con fogli di misura differente.
L'I.U. quindi viene pagato al massimo $2€ \cdot 225 + 1€ \cdot 25 = 475€$.
La risposta è `0475`.

Soluzione del problema 12. Dato che $7 < 8$ il numero m cercato è pari. Inoltre $f\left(\frac{m}{2}+1\right)$ deve essere 1. Si noti che $f(k+1)$ è maggiore di 0 qualunque sia k. Si noti poi che $f(k) = 1$ se e solo se k è una potenza di 2 come si vede per induzione completa. Supposta vera per tutti gli $h < k$, i casi sono due: k è una potenza di 2 oppure no. Nel primo caso la proprietà è verificata grazie alla definizione per ricorsione. Nel secondo caso, k deve esere dispari e $f(k) = f(\ell) + f(\ell+1)$ per un numero ℓ appropriato maggiore di 0. Dunque $f(k) > 1$ e la proprietà è ancora verificata.
Inoltre $f(2^n - 1) = n$ per ogni n naturale come si vede facilmente per induzione, dato che $2^{n+1} - 1 = 2(2^n - 1) + 1$ e $f(2^{n+1} - 1) = f(2^n - 1) + f(2^n) = f(2^n - 1) + 1$. Dunque $8 = f(2^8 - 1) = f(255)$ e $7 = f(2^7 - 1) = f(2(2^7 - 1)) = f(254)$. Così $a_{254} = \frac{7}{8}$.
Anche se non necessario, si vede facilmente per induzione che due numeri che compaiono consecutivi nella successione $(f(n))_{n>1}$ sono primi fra loro e che effettivamente tutti i numeri razionali vengono elencati dalla successione $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
La risposta è `0254`.

Soluzione del problema 13. Chiamiamo sincero il sospettato che dice sempre il vero e sospetto ogni altro sospettato. Noi dobbiamo calcolare quante domande servono come minimo al poliziotto per capire il colpevole, qualsiasi siano le risposte dei sospettati. Quindi dobbiamo capire quali sono le risposte dei sospettati che obbligano il poliziotto a fare più domande. È evidente che non ha senso che il poliziotto rivolga a un sospettato più di una domanda al giorno e gliene bastano due per ottenere informazione certa. Questo perché se la prima volta un sospettato ha risposto che il colpevole è x, e la seconda volta ha risposto

che il colpevole è y (diverso da x), allora la terza volta può tornare a rispondere x, senza aggiungere informazione. Si ottiene informazione certa quando un sospettato ripete nel secondo giorno la risposta che ha dato nel primo: almeno $2015 + 2015 = 4030$ domande. Per farne meno, basta ottenere il primo giorno tre risposte diverse e chiedere nel secondo giorno a un sospettato per ciascun gruppo. Il caso peggiore è se il primo giorno si ottengono solo due risposte diverse: 1007 sospettati hanno risposto con un nome, 1008 hanno risposto con un altro. Quindi servono 2015 domande il primo giorno e a tutti quelli del gruppo di 1007 sospettati nel secondo. In totale sono $2015 + 1007 = 3022$.
La risposta è `3022`.

Soluzione del problema 14. Strategia di Sally: a ogni mossa lasciare la massima distanza minima possibile. Ad esempio, alla prima mossa cancella tutti i numeri dispari. In tal modo la distanza fra due numeri consecutivi sarà come minimo $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ dopo la prima, seconda, terza, quarta, quinta, sesta e settima mossa rispettivamente.
Strategia di Harry: a ogni mossa lasciare la minima distanza massima possibile. In tal modo la distanza tra due numeri consecutivi sarà come massimo $2^{13}, 2^{12}, 2^{11}, 2^{10}, 2^9, 2^8, 2^7 = 128$ dopo la prima, seconda terza, quarta, quinta, sesta, settima mossa rispettivamente. Alla fine Sally ottiene 128 euro.
La risposta è `0128`.

Soluzione del problema 15. Sia ℓ il lato del cubo. Unendo nel modo descritto i centri delle facce, si ottiene un ottaedro. Il solido è composto da due piramidi uguali a base quadrata. L'altezza della piramide è $\dfrac{\ell}{2}$, l'area della base è $\dfrac{\ell^2}{2}$; dunque il volume di S è $2\dfrac{\ell^3}{12} = \dfrac{\ell^3}{6}$. Il rapporto richiesto vale $\dfrac{\ell^3}{\frac{\ell^3}{6}} = 6$.
La risposta è `0006`.

Soluzione del problema 16. Sia P la probabilità cercata. Allora

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot P + \frac{1}{3} \cdot (1 - P)$$

dove il primo termine della somma esprime il caso di uscita testa al primo lancio, il secondo di uscita fiamma e il terzo di uscita croce. Quindi $P = \dfrac{2}{3}$.
La risposta è `0005`.

Soluzione del problema 17. Notiamo che, se l'area seminata fino a quel momento è un rettangolo, entrambe le possibili semine del contadino la mantengono tale. In particolare, la prima semina restituisce un rettangolo con i lati rivolti a Est e Ovest allungati di due file di vasi, mentre la seconda ne restituisce uno in cui tutti i lati sono allungati di due file. Quindi, chiamato x il numero di semine del primo tipo e y quelle del secondo, alla fine dei 21 giorni il rettangolo avrà i lati rivolti a Nord e Sud composti da $2y + 1$ file di vasi, mentre quelli rivolti ad Est ed Ovest da $2x + 2y + 1$ file di vasi. Considerato che $x + 2y = 20$, deve valere che $0 \leq y \leq 10$. Ad ogni valore di y corrisponde uno ed un solo rettangolo. Viceversa ad ogni rettangolo corrisponde uno ed un solo valore y. Pertanto ci sono 11 configurazioni possibili.
La risposta è `0011`.

Soluzione del problema 18. Due osservazioni molto utili per svolgere l'esercizio; la prima è la seguente: se un numero primo è a specchio, allora è palindromo. Inoltre, i numeri minori che terminano con 5 e che sono a specchio sono facili da verificare. Dalla prima osservazione, si ha che tra i numeri minori di 300 i numeri primi a specchio sono 11, 101, 131, 151, 181, 191 . Di conseguenza, tra i numeri minori di 103, solo negli intervalli $]47, 53[$ e $]53, 59[$ possono esserci 5 numeri a specchio consecutivi. In $]47, 53[$ e $]53, 59[$ ci sono, rispettivamente, 51 e 54 che non sono a specchio. Per i numeri compresi tra 103 e 199, gli intervalli in cui possono comparire 5 numeri a specchio consecutivi sono soltanto $]115, 127[$, $]131, 137[$, $]139, 145[$, $]157, 163[$, $]167, 173[$, $]185, 191[$. In ciascuno di questi intervalli, si trovano i numeri 118 e 122 nel primo, poi rispettivamente 142, 160, 170, 188 che non sono a specchio. Dunque

non c'è una sequenza di 5 numeri a specchio. Nell'intervallo $]205, 211[$ 206, 207, 208, 209 e 210 sono tutti a specchio.
La risposta è `0210`.

Soluzione del problema 19. Conviene contare i modi per inserire due separatori tra 80 palline, cioè ai modi di ordinare 80+(3-1) elementi indipendentemente dall'ordine dei (3-1) elementi "separatori" e degli 80 elementi "palline", i modi sono $\frac{[80+(3-1)]!}{80!(3-1)!} = \binom{82}{2} = 41 \cdot 81$.
Dei tre numeri n, m e k, è impossibile che siano tutti uguali perché 80 non è divisibile per 3. Negli altri due casi, se due dei tre numeri n, m e k sono uguali, è necessario contare le coppie (a, b) tali che $b = 80 - 2a \geq 0$, che sono tante quanti i numeri a tali che $0 \leq a \leq 40$; dato che i numeri vengono poi ordinati in modo univoco, la stessa situazione si presenta in 3 modi di separazione; così i modi di separazione sono in totale $41 \cdot 3$. In ciascuno di questi casi la probabilità che il numero estratto sia uno dei due è $\frac{2}{81}$. Nel caso in cui i numeri n, m e k siano a due a due distinti, la probabilità che uno dei tre sia quello estratto è $\frac{3}{81}$; dato che i numeri vengono poi ordinati in modo univoco, la stessa situazione si presenta in $3! = 6$ modi di separazione. I casi in cui sono perciò $\frac{41 \cdot 81 - 41 \cdot 3}{6} = 41 \cdot 13$. La probabilità si calcola come

$$\frac{2}{81} \cdot \frac{41}{41 \cdot 13 + 41} + \frac{3}{81} \cdot \frac{41 \cdot 13}{41 \cdot 13 + 41} = \frac{41}{14 \cdot 81} = \frac{41}{1134}.$$

La risposta è `1175`.

Soluzione del problema 20. La diagonale principale è divisa in tre parti uguali. Sia ℓ la lunghezza del lato del cubo. La diagonale è lunga $\ell\sqrt{3}$. Il volume di una delle due piramidi è $\frac{\ell^3}{6}$. Dato che la diagonale principale è perpendicolare a una faccia della piramide che ha area $\ell^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, l'altezza relativa a quella faccia è $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$ che è un terzo della lunghezza della diagonale.
La risposta è `1176`.

Soluzione del problema 21. Si devono contare le coppie ordinate (p, n), con p primo e $n \leq 200$ intero positivo, tale che $p^2 + np = k^2$, per qualche k intero.
Dato che $p^2 + np = p(p + n)$, si vede subito che, se $p^2 + np = q^2 + \ell q$, allora $p = q$ e $n = \ell$. Inoltre deve essere $p|k^2$; dunque $p|k$ poichè p è primo, cioè $k = mp$ per un unico intero positivo m. Sostituendo otteniamo $p + n = m^2 p$. Allora $n = (m^2 - 1)p$. Osserviamo subito che $2 \leq m \leq 10$, perché sennò $(m^2 - 1)p \geq (m^2 - 1)2 \geq 120 \cdot 2 = 240$.

m	$(m^2-1)p$	$\max\{p \mid p \text{ primo}, (m^2-1)p \leq 200\}$	coppie
2	$3p$	61	18
3	$8p$	23	9
4	$15p$	13	6
5	$24p$	7	4
6	$35p$	5	3
7	$48p$	3	2
8	$63p$	3	2
9	$80p$	2	1
10	$99p$	2	1
		totale	46

La risposta è `0046`.

Soluzione del problema 22. La probabilità che l'ultimo della coda abbia in tasca il 6 è $1/6$. In questo caso il gioco riesce se i rimanenti pensionati sono tutti già ordinati e la probabilità di questo evento è $1/5!$. Pertanto la probabilità che il gioco abbia successo in questo caso è: $1/6 \cdot 1/5!$. La probabilità invece che l'ultimo della coda non abbia in tasca il 6 è $5/6$. In questo caso la probabilità che il pensionato successivo abbia in tasca il 6 è $1/5$ e in questo caso il gioco riesce se tutti i rimanenti 4 pensionati sono già ordinati (1 caso su 4!). Allora la prima fase del gioco si ferma al secondo pensionato coinvolto e il gioco riesce con probabilità $5/6 \cdot 1/5 \cdot 1/4!$. La probabilità che il secondo pensionato non abbia in tasca il 6 è $4/5$. In questo caso il terzo pensionato coinvolto ha in tasca il 6 con probabilità $1/4$ e i 3 pensionati rimanenti sono ordinati con probabilità $1/3!$. Pertanto la probabilità di essere in questa situazione è $5/6 \cdot 4/5 \cdot 1/4 \cdot 1/3!$ e così via. In conclusione il gioco riesce con probabilità:

$$\frac{1}{6!} + \frac{5}{6!} + \frac{5 \cdot 4}{6!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6!} = \frac{163}{360}.$$

La risposta è `0523`.

Soluzione del problema 23. Si costruiscono le parallele $NP \parallel AC$ con P su AB, $NQ \parallel AB$ con Q su AC, $MR \parallel AC$ con R su AB e $MT \parallel AB$ con T su AC. Si ottengono le relazioni

$$\frac{BN}{BC} = \frac{PN}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{BC}{CN} = \frac{AB}{NQ}$$

Perciò

$$\frac{BN}{CN} = \frac{PN \cdot AB}{AC \cdot AP}$$

Inoltre, gli angoli $\widehat{ATM}$ e $\widehat{APN}$ sono uguali in quanto angoli opposti di un parallelogrammo. Perciò i triangoli APN e ATM sono simili; quindi $\frac{AP}{AT} = \frac{PN}{TM}$. Ne risulta

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AT}{TM} = \frac{AC}{AB}.$$

In conclusione

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2.56.$$

La risposta è `2560`.

Soluzione del problema 24. Siccome la pescata è totalmente casuale i casi possibili che si possono presentare prima del lancio sono 6, simmetrici a coppie. È chiaro quindi che la domanda è capire quanti sono i casi in cui entrambi i sacerdoti ottengono lo stesso numero: infatti, supposto un risultato in cui uno dei due supera l'altro, in un caso Kant perderà, ma nel caso simmetricamente opposto vincerà o viceversa. Dovremmo quindi andare ad analizzare nello specifico tre situazioni: uno pesca i dadi da 4 e da 6 e l'altro quelli da 8 e da 12, uno 4 e 8 e l'altro 6 e 12, e infine uno da 4 e da 12 e l'altro da 6 e da 8. Si disegnano perciò 3 tabelle con i possibili risultati e i conseguenti modi di ottenere questi ultimi; contare i casi non è complicato. Per la prima situazione contiamo 119 modi su 2304 $(4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12)$ di ottenere due risultati uguali, per la seconda 158 e per la terza 181: 458 in totale quindi. Vediamo come:

$4-6$			$8-12$		
somma	modi		somma	modi	
2	1		2	1	$1 \cdot 1 = 1 +$
3	2		3	2	$2 \cdot 2 = 4 +$
4	3		4	3	$3 \cdot 3 = 9 +$
5	4		5	4	$4 \cdot 4 = 16 +$
6	4		6	5	$4 \cdot 5 = 20 +$
7	4		7	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
8	3		8	7	$3 \cdot 7 = 21 +$
9	2		9	8	$2 \cdot 8 = 16 +$
10	1		10	8	$1 \cdot 8 = 8 =$
					119

4 − 8			6 − 12		
somma	modi		somma	modi	
2	1		2	1	$1 \cdot 1 = \ \ 1 +$
3	2		3	2	$2 \cdot 2 = \ \ 4 +$
4	3		4	3	$3 \cdot 3 = \ \ 9 +$
5	4		5	4	$4 \cdot 4 = 16 +$
6	4		6	5	$4 \cdot 5 = 20 +$
7	4		7	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
8	4		8	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
9	4		9	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
10	3		10	6	$3 \cdot 6 = 18 +$
11	2		11	6	$2 \cdot 6 = 12 +$
12	1		12	6	$1 \cdot 6 = \ \ 6 =$
					158

4 − 12			6 − 8		
somma	modi		somma	modi	
2	1		2	1	$1 \cdot 1 = \ \ 1 +$
3	2		3	2	$2 \cdot 2 = \ \ 4 +$
4	3		4	3	$3 \cdot 3 = \ \ 9 +$
5	4		5	4	$4 \cdot 4 = 16 +$
6	4		6	5	$4 \cdot 5 = 20 +$
7	4		7	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
8	4		8	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
9	4		9	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
10	4		10	5	$4 \cdot 5 = 20 +$
11	4		11	4	$4 \cdot 4 = 16 +$
12	4		12	3	$4 \cdot 3 = 12 +$
13	4		13	2	$4 \cdot 2 = \ \ 8 +$
14	3		14	1	$3 \cdot 1 = \ \ 3 =$
					181

Perciò la probabilità cercata sarà $\dfrac{2304 \cdot 3 - 458}{2304 \cdot 6}$; ridotta ai minimi termini $\dfrac{3227}{6912} \approx 0.466869$. La risposta è `4668`.